CUADERNILLO 2

Nueva carpeta de Matemática VI

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

2. Funciones trigonométricas 3
Revisión inicial ... 4
Ángulos orientados en el sistema cartesiano ... 5
Sistema circular de medición de ángulos ... 6
Las razones trigonométricas ... 7
La circunferencia trigonométrica ... 8
Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo ... 9
Funciones trigonométricas de un número real ... 10
La función $y = \text{sen } x$ ... 10
Funciones del tipo $f(x) = a \,.\, sen\,(bx)$ ... 11
La función $f(x) = \cos x$ ... 12
Funciones del tipo $f(x) = a \,.\, cos\,(bx)$ ... 13
La función $y = tg\, x$ ... 14
Pares especiales de ángulos ... 15
Ecuaciones trigonométricas ... 17
En el mundo real ... 19
El sonido y las funciones periódicas ... 19
Los modelos periódicos y las funciones trigonométricas ... 20
Más actividades ... 21
Autoevaluación ... 22
Actividades integradoras ... 23

AIQUE

Este CUADERNILLO 2 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí y Claudia García en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las *funciones trigonométricas* son la herramienta matemática adecuada para la descripción de fenómenos *periódicos*, que se repiten en ciclos regulares a través del tiempo, tan diversos como la actividad cardíaca, el movimiento de los planetas y la variación de la presión que produce en el aire la propagación de un sonido.
Estas variaciones pueden describirse en forma de ondas y representarse gráficamente.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Los siguientes números son las longitudes, en centímetros, de los lados de cuatro triángulos rectángulos.

a) Agrupen, en ternas, los que corresponden a un mismo triángulo.

85	56	33	17	20	77
15	8	29	65	36	21

b) Expliquen qué propiedad usaron para agrupar las ternas.

.....

.....

2 Racionalicen los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3 Resuelvan las ecuaciones que consideren adecuadas y completen el cuadro siguiente con las medidas de los ángulos que se indican.

$\hat{\alpha}$	Complemento de $\hat{\alpha}$	Suplemento de $\hat{\alpha}$
$17°$		
$x + 22°$	$3x + 20°$	
$15x - 14°$		$18x + 29°$
	$11x - 16°$	$24x - 30°$

4 Calculen la medida de un mástil que proyecta una sombra de 29,7 cm cuando, en el mismo lugar, una persona de 1,674 m de altura proyecta una sombra de 12,4 cm..

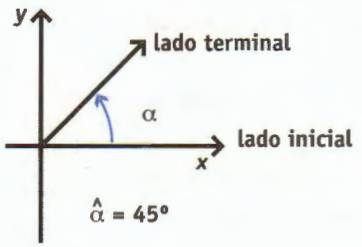
5 Analicen si es rectángulo un triángulo que tiene dos ángulos interiores que miden $(3x + 32)°$ y $18x°$, respectivamente, y el ángulo exterior no adyacente a ellos mide $(33x - 28)°$.

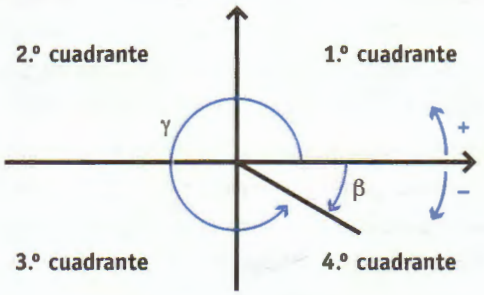
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ángulos orientados en el sistema cartesiano

Para observar

Así representamos ángulos en el sistema cartesiano:





$\hat{\beta} = -30°$ $\hat{\gamma} = 330°$

6 Ubiquen en el segundo cuadro los ángulos que aparecen en el primer cuadro, según el cuadrante al que pertenece cada uno.

$\hat{\alpha} = 375°$	$\hat{\varepsilon} = 1290°$	$\hat{\iota} = 520°$	$\hat{\mu} = -470°$
$\hat{\beta} = 172°$	$\hat{\phi} = -45°$	$\hat{\varphi} = -299°$	$\hat{\nu} = 78°$
$\hat{\chi} = -92°$	$\hat{\gamma} = 1458°$	$\hat{\kappa} = -2°$	$\hat{o} = 690°$
$\hat{\delta} = 406°$	$\hat{\eta} = 221°$	$\hat{\lambda} = 874°$	$\hat{\pi} = -240°$

Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante

7 Agrupen los siguientes ángulos considerando que por grupo tienen el mismo lado terminal.

$\hat{\alpha} = 13°$	$\hat{\chi} = -701°$	$\hat{\varepsilon} = 1453°$	$\hat{\gamma} = 396°$	$\hat{\iota} = 385°$	$\hat{\kappa} = 19°$
$\hat{\beta} = 745°$	$\hat{\delta} = 25°$	$\hat{\phi} = 36°$	$\hat{\eta} = -341°$	$\hat{\varphi} = 1044°$	$\hat{\lambda} = -707°$

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D

8 Escriban la medida de tres ángulos que verifiquen las condiciones pedidas en cada caso.

a) Pertenece al tercer cuadrante y es negativo.

b) Pertenece al segundo cuadrante y es positivo.

c) Tiene el mismo lado terminal que $\hat{\alpha} = 110°$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

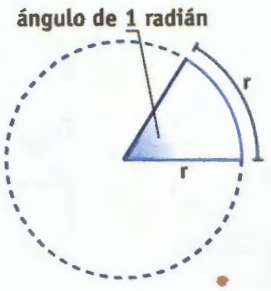
Sistema circular de medición de ángulos

Para leer y recordar

- En el *sistema circular,* los ángulos se miden en *radianes.*
- Un *radián* es la medida del ángulo central que en una circunferencia determina un arco de la misma medida que el radio.

Como el radio está comprendido 2π veces en la longitud de la circunferencia, un ángulo de un giro corresponde a 2π radianes.

- Si conocemos la medida de un ángulo en grados y queremos calcular su medida en radianes, o viceversa, debemos tener en cuenta que 180° equivalen a π radianes, es decir:



$$\frac{\hat{\alpha}(°)}{180°} = \frac{\hat{\alpha}(\text{rad})}{\pi}$$

Para indicar que la medida de $\hat{\alpha}$ es 2 radianes, ponemos $\hat{\alpha} = 2$ *rad* o, directamente, $\hat{\alpha} = 2$.

9 Completen la tabla.

Grados sexagesimales	360°	450°			135°			120°		
Radianes	2π		$\frac{5}{4}\pi$			$\frac{5}{6}\pi$			$\frac{1}{6}\pi$	
Giros	1			2			$\frac{3}{2}$			5

10 Hallen la longitud del arco que recorre la esfera de un péndulo, cuyo hilo mide 25 cm, cuando barre un ángulo de 20°.

.....

.....

11 Un atleta corre alrededor de una pista circular, en sentido contrario a las agujas del reloj, y después de dar cinco vueltas y media, se sienta a tomar agua. ¿Qué ángulo, en radianes, recorrió?

.....

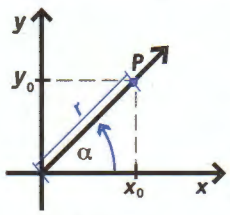
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su repr

Las razones trigonométricas

Para leer y recordar

Así definimos las *razones trigonométricas* para un ángulo cualquiera, en función de las coordenadas de un punto que se encuentre en su lado terminal.

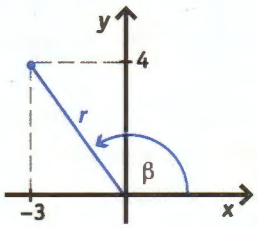


$P = (x_0; y_0)$

$sen\,\hat{\alpha} = \frac{y_0}{r}$

$cos\,\hat{\alpha} = \frac{x_0}{r}$

$tg\,\hat{\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$



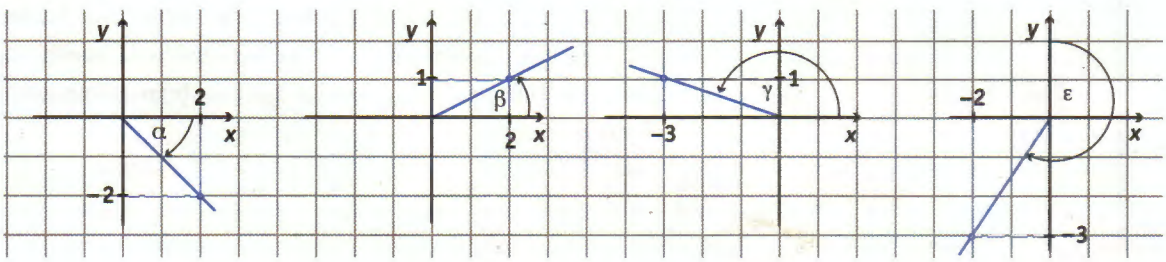
$P = (-3; 4) \quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$sen\,\hat{\beta} = \frac{4}{5}$

$cos\,\hat{\beta} = \frac{(-3)}{5} = -\frac{3}{5}$

$tg\,\hat{\beta} = \frac{4}{(-3)} = -\frac{4}{3}$

12 Observen los datos en cada figura y escriban las razones trigonométricas.



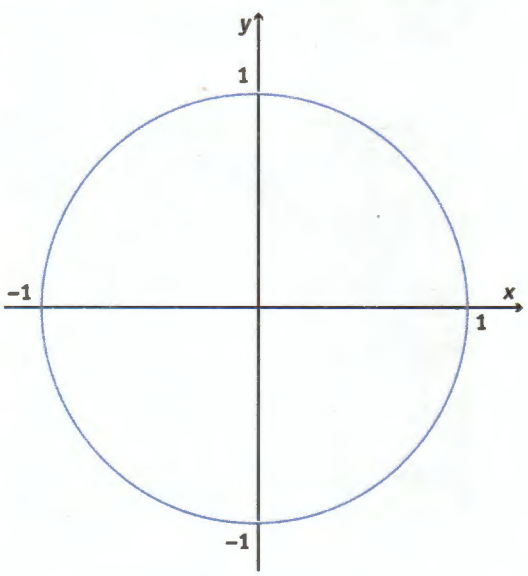
$sen\,\hat{\alpha} =$ ____ $sen\,\hat{\beta} =$ ____ $sen\,\hat{\gamma} =$ ____ $sen\,\hat{\varepsilon} =$ ____

$cos\,\hat{\alpha} =$ ____ $cos\,\hat{\beta} =$ ____ $cos\,\hat{\gamma} =$ ____ $cos\,\hat{\varepsilon} =$ ____

$tg\,\hat{\alpha} =$ ____ $tg\,\hat{\beta} =$ ____ $tg\,\hat{\gamma} =$ ____ $tg\,\hat{\varepsilon} =$ ____

13 Marquen los siguientes ángulos en la circunferencia de radio unidad y, teniendo en cuenta las definiciones, completen el cuadro.

$\hat{\alpha}$	(x; y)	$sen\,\hat{\alpha}$	$cos\,\hat{\alpha}$	$tg\,\hat{\alpha}$
0°				
90°				
180°				
270°	(0; −1)	−1	0	No existe
360°				
810°				
−90°				

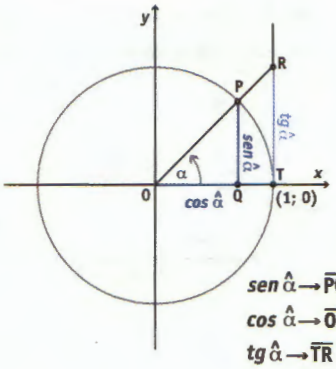


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

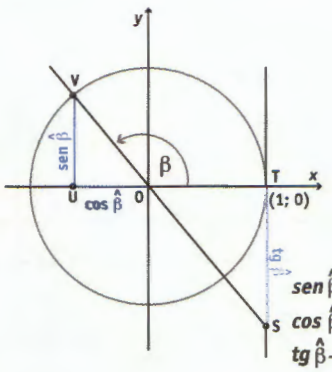
La circunferencia trigonométrica

Para observar

- Llamamos *circunferencia trigonométrica* o *circunferencia unidad* a aquella cuyo radio es 1 y su centro es el origen de coordenadas.
  Al considerar el radio de una unidad, las expresiones en las que aparece este se simplifican.
  La circunferencia trigonométrica nos permite ver una "representa-
- ción geométrica" del seno, del coseno y de la tangente de un ángulo, mediante "segmentos asociados".



$sen\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{PQ}$
$cos\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{0Q}$
$tg\ \hat{\alpha} \rightarrow \overline{TR}$



$sen\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{UV}$
$cos\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{U0}$
$tg\ \hat{\beta} \rightarrow \overline{TS}$

Si $\hat{\alpha}$ pertenece al segundo o al tercer cuadrante, encontramos el segmento asociado a la tangente trazando la semirrecta opuesta al lado terminal del ángulo hasta su intersección con la recta $x = 1$.

14 Dibujen una circunferencia trigonométrica y marquen un ángulo en cada cuadrante. Luego señalen con colores distintos los segmentos asociados, respectivamente, al seno, el coseno y la tangente de cada ángulo.

15 El *signo* de cada una de las razones trigonométricas de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentra el ángulo, ya que este determinará el signo de las coordenadas de cualquier punto que se encuentre en su lado terminal. Completen el cuadro.

	Signo del seno (+ / +, − / −)	Signo del coseno	Signo de la tangente
1.° cuadrante	+		
2.° cuadrante	+		
3.° cuadrante	−		
4.° cuadrante	−		

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

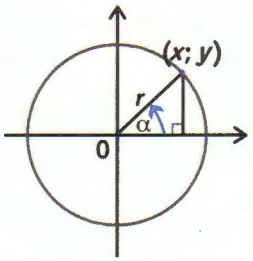
Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

Para leer y recordar

Seno, coseno y tangente

$$\frac{sen\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = tg\ \hat{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{sen\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}} = tg\ \hat{\alpha}}$$



Relación pitagórica

$$sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha} = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{(x^2 + y^2)}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\boxed{sen^2\hat{\alpha} + cos^2\hat{\alpha} = 1}$$

Secante, cosecante y cotangente de un ángulo

Así definimos tres nuevas razones trigonométricas: *cosecante*, *secante* y *cotangente* de un ángulo (para todos los casos en los que el denominador no se anule).

$$cosec\ \hat{\alpha} = \frac{r}{y} \qquad sec\ \hat{\alpha} = \frac{r}{x} \qquad ctg\ \hat{\alpha} = \frac{x}{y}$$

Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\boxed{cosec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{sen\ \hat{\alpha}}} \qquad \boxed{sec\ \hat{\alpha} = \frac{1}{cos\ \hat{\alpha}}} \qquad \boxed{ctg\ \hat{\alpha} = \frac{1}{tg\ \hat{\alpha}}}$$

16 Sin calcular el valor de $\hat{\alpha}$, encuentren todas sus razones trigonométricas, utilizando la información que se da en cada caso.

a) $sen\ \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{20}}{5}$ y $90° < \hat{\alpha} < 360°$ b) $cosec\ \hat{\alpha} = -\frac{\sqrt{26}}{5}$ y $tg\ \hat{\alpha} > 0$ c) $ctg\ \hat{\alpha} = 1$ y $cosec\ \hat{\alpha} < 0$

17 Completen el cuadro.

Punto perteneciente al lado terminal de $\hat{\alpha}$	$sen\ \hat{\alpha}$	$cos\ \hat{\alpha}$	$tg\ \hat{\alpha}$	$cosec\ \hat{\alpha}$	$sec\ \hat{\alpha}$	$ctg\ \hat{\alpha}$
(1; 1)						
(−4; 3)						
(−2; −3)						
(8; −6)						

18 Una *identidad* es una igualdad que se verifica para cualquier valor de las variables que contiene, siempre que las expresiones estén definidas y las operaciones indicadas se puedan realizar. Verifiquen que las siguientes igualdades sean identidades.

a) $\frac{tg\ \hat{\alpha}}{sec\ \hat{\alpha}} = sen\ \hat{\alpha}$ b) $\frac{sen^3\ \hat{\alpha}}{cos\ \hat{\alpha}} + tg\ \hat{\alpha} = (2sen^2\ \hat{\alpha} + cos^2\ \hat{\alpha}) \cdot tg\ \hat{\alpha}$ c) $sec\ \hat{\alpha} - cos\ \hat{\alpha} = tg\ \hat{\alpha} \cdot sen\ \hat{\alpha}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

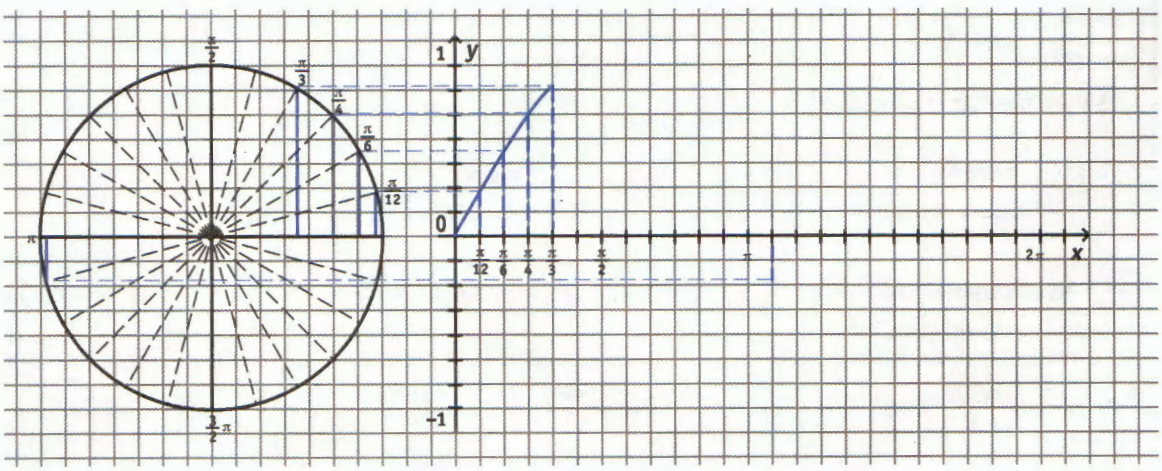
Funciones trigonométricas de un número real

Para leer y recordar

Como la medida en radianes de un ángulo orientado es un número real, podemos definir las funciones trigonométricas seno y coseno sobre el dominio de los números reales, asociando a cada número la medida de un ángulo en radianes.

La función $f(x) = sen\ x$

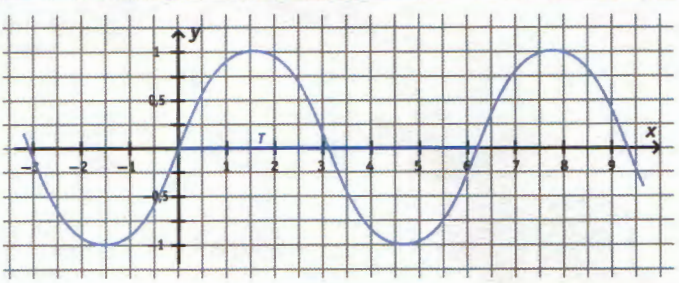
19 Completen la construcción geométrica de la gráfica de un ciclo completo de la función $y = sen\ x$. Para hacerlo, trasladen las medidas de los segmentos asociados a los senos de los ángulos señalados en la circunferencia trigonométrica.



Para observar

La función $f(x) = sen\ x$, de dominio $\mathbb{R}$, es una función *periódica* cuyo período es $T = 2\pi$, porque sus valores se repiten cíclicamente en intervalos del dominio de longitud 2π.

Su imagen es $Im\ f = [-1; 1]$.



20 Analicen la gráfica $f(x) = sen\ x$ en el intervalo $[0; 2\pi)$ e indiquen:

a) Intersecciones con los ejes.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

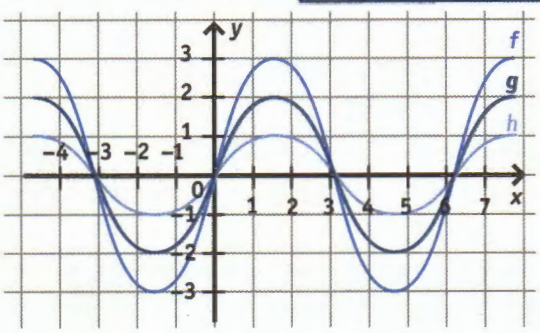
c) Máximos y mínimos.

d) Intervalos de positividad y de negatividad.

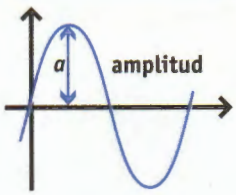
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

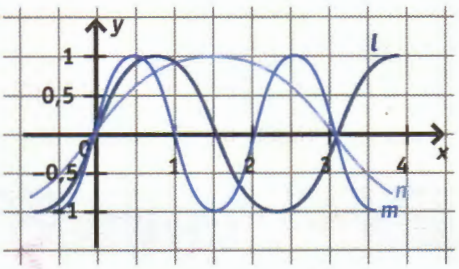
Funciones del tipo $f(x) = a \,.\, sen\,(bx)$

Para observar

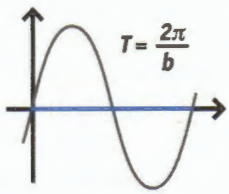


$f(x) = 3\ sen\ x$
$g(x) = 2\ sen\ x$
$h(x) = sen\ x$



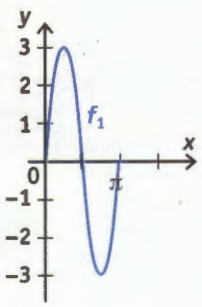


$l(x) = sen\ (2x)$
$m(x) = sen\ (3x)$
$n(x) = sen\ x$

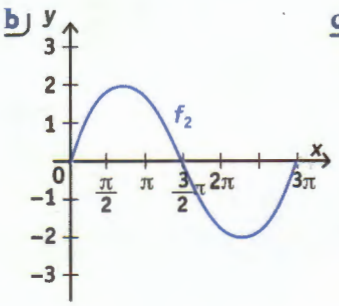


21 Las siguientes figuras muestran la gráfica de funciones del tipo $y = a \,.\, sen\ (bx)$ en un intervalo de longitud T. Analícenlas y completen el cuadro.

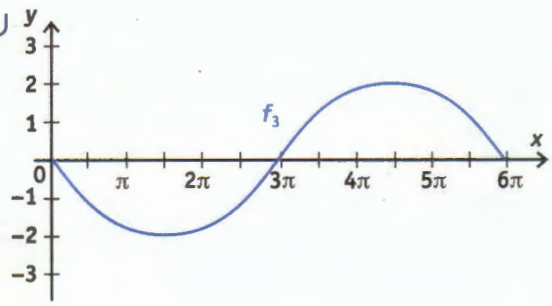
a)



b)



c)



	a	b	Fórmula	T	Ceros	Máximo	Mínimo	C^+	C^-
f_1									
f_2									
f_3									

22 Representen gráficamente cada una de las siguientes funciones en un intervalo de longitud T.

a) $y = 4\ sen\ (2x)$

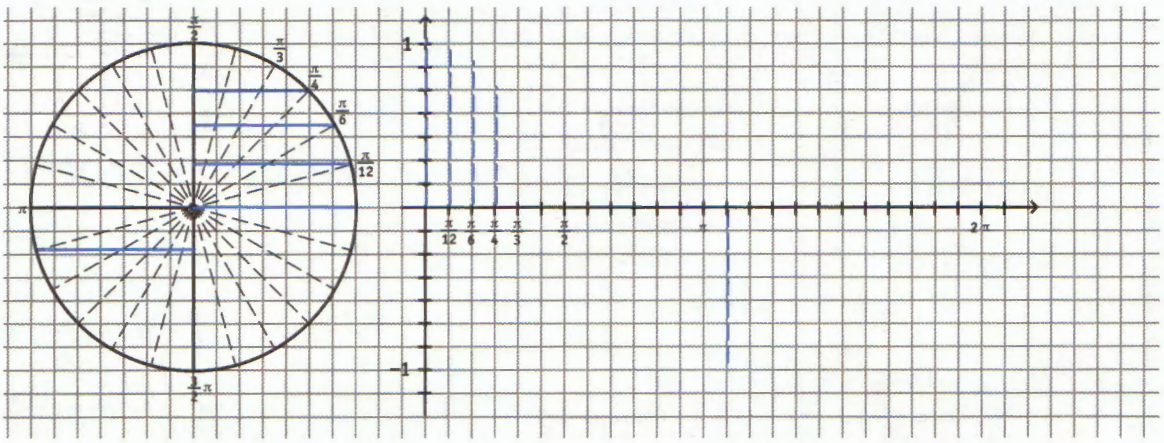
b) $y = \frac{1}{4}\ sen\ (4x)$

c) $y = -sen\ x$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

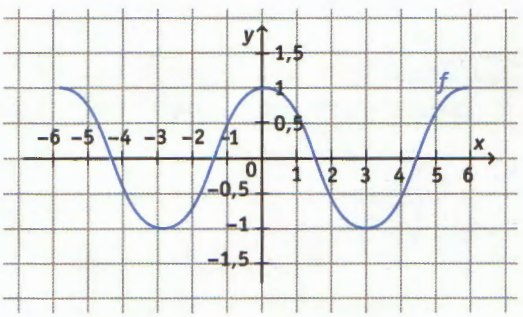
La función $f(x) = \cos x$

23 Completen la construcción geométrica de la gráfica de la función $y = \cos x$.
Para hacerlo, trasladen las medidas de los segmentos asociados a los cosenos de los ángulos señalados en la circunferencia trigonométrica.



Para observar

La función $f(x) = \cos x$, de dominio $\mathbb{R}$, es una función periódica. Su período es $T = 2\pi$ y su imagen es el intervalo $[-1; 1]$.



24 Analicen la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0; 2\pi)$ e indiquen:

a) Intersecciones con los ejes.

.....

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

.....

c) Máximos y mínimos.

.....

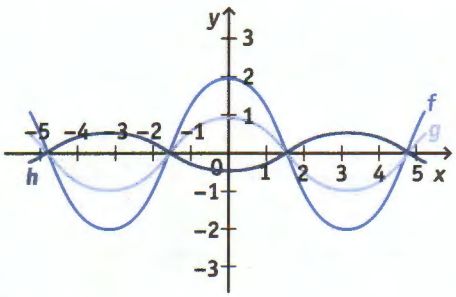
d) Intervalos de positividad y de negatividad.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Funciones del tipo $f(x) = a \,.\, cos\,(bx)$

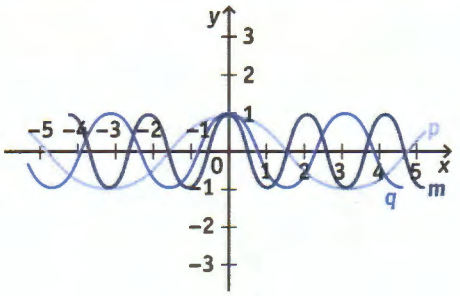
Para observar



$f(x) = 2\ cos\ x$

$g(x) = cos\ x$

$h(x) = -\frac{1}{2}\ cos\ x$



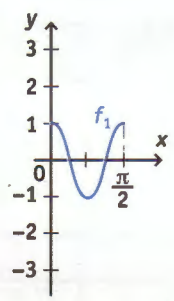
$p(x) = cos\ x$

$q(x) = cos\ (2x)$

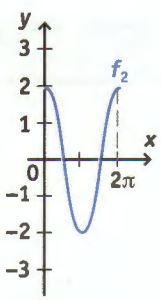
$m(x) = cos\ (3x)$

25 Los siguientes gráficos muestran una onda completa de funciones del tipo $y = a \,.\, cos\,(bx)$. Analícenlos y completen el cuadro referido al intervalo graficado.

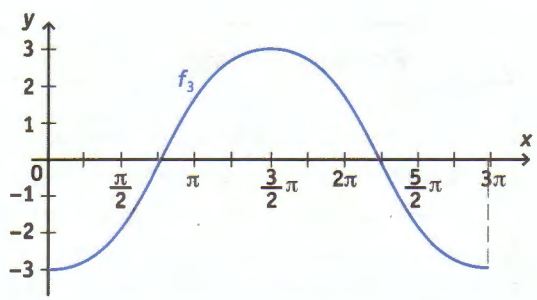
a)



b)



c)



	a	b	Fórmula	T	Ceros	Máximo	Mínimo	C^+	C^-
f_1									
f_2									
f_3									

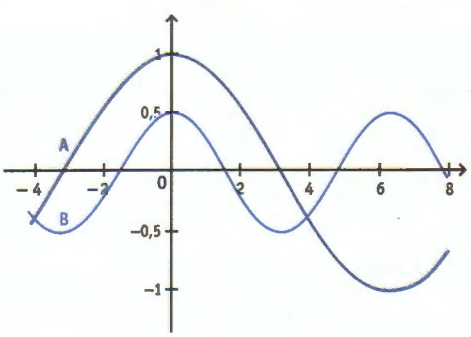
26 Las funciones del gráfico son

$f(x) = cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ y $g(x) = \frac{1}{2}\ cos\,(x)$.

Indiquen cuál es cada una.

.....

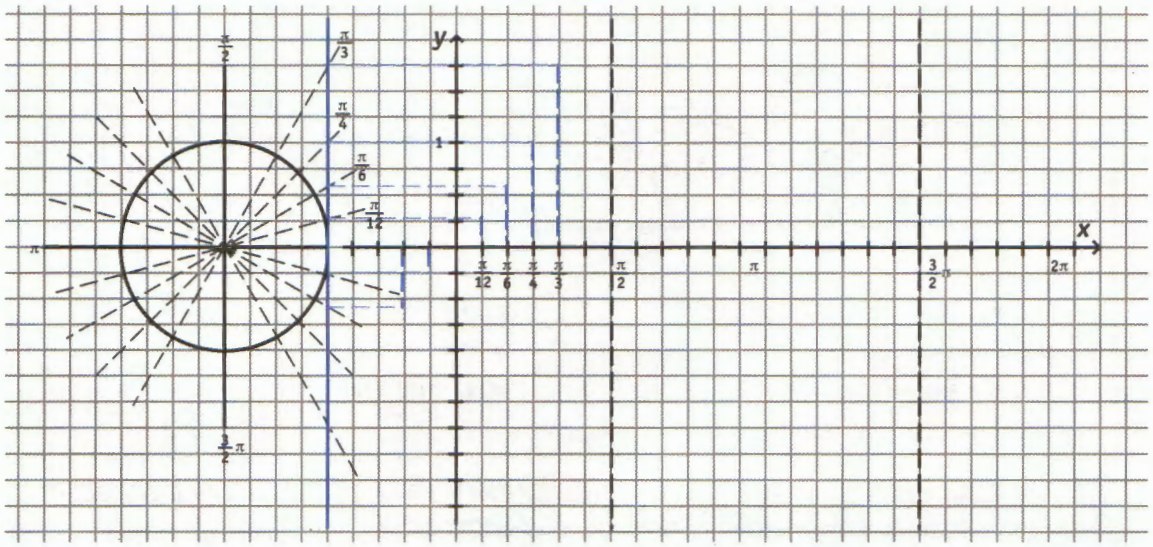
.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La función $f(x) = tg\ x$

27 Completen la construcción geométrica de la gráfica de la función $y = tg\ x$. Para hacerlo, trasladen al diagrama cartesiano las medidas de los segmentos asociados a las tangentes de los ángulos señalados en la circunferencia trigonométrica.

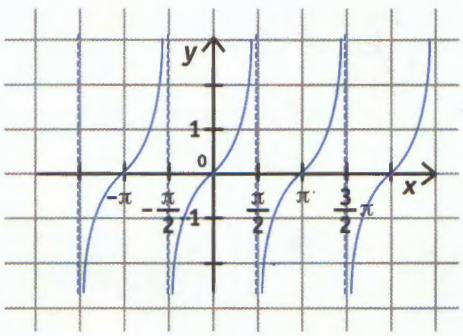


Para observar

- La representación gráfica nos permite apreciar que la función $f(x) = tg\ x$ no está definida para los valores de x correspondientes a ángulos cuyo lado terminal está incluido en el eje de ordenadas. Es decir que:

  $$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\ldots -\tfrac{\pi}{2};\ \tfrac{\pi}{2};\ 3\tfrac{\pi}{2};\ \ldots\}$$

- En cada uno de estos valores excluidos del dominio, la gráfica presenta una asíntota vertical.
- El período de esta función es $T = \pi$.
- No tiene máximo ni mínimo, y su imagen es $\mathbb{R}$.



28 Analicen la gráfica de la función $f(x) = tg\ x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right)$ e indiquen, si es posible:

a) Intersecciones con los ejes. .....

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. .....

c) Máximos y mínimos. .....

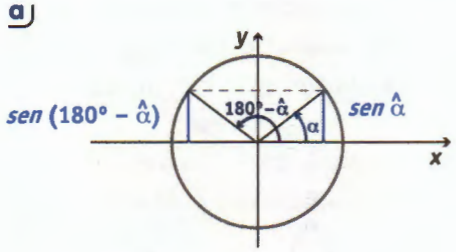
d) Intervalos de positividad y de negatividad. .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Pares especiales de ángulos

29 Tracen en cada circunferencia los segmentos asociados al seno, al coseno y a la tangente de los ángulos señalados, y luego completen las igualdades.

a)

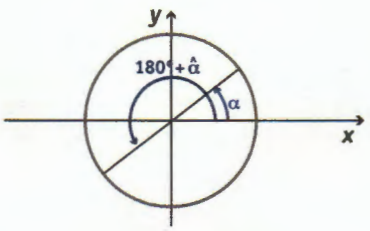


$sen\ (180° - \hat{\alpha}) = sen\ \hat{\alpha}$

$cos\ (180° - \hat{\alpha}) = -cos\ \hat{\alpha}$

$tg\ (180° - \hat{\alpha}) = -tg\ \hat{\alpha}$

b)

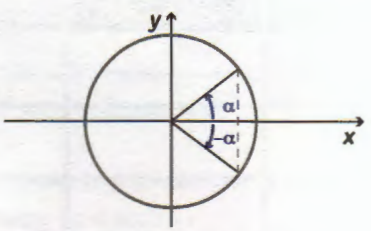


$sen\ (180° + \hat{\alpha}) =$

$cos\ (180° + \hat{\alpha}) =$

$tg\ (180° + \hat{\alpha}) =$

c)

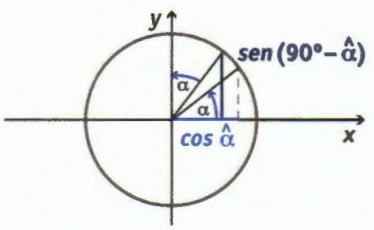


$sen\ (-\hat{\alpha}) =$

$cos\ (-\hat{\alpha}) =$

$tg\ (-\hat{\alpha}) =$

d)

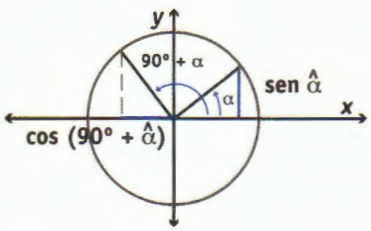


$sen\ (90° - \hat{\alpha}) = \cos \hat{\alpha}$

$cos\ (90° - \hat{\alpha}) =$

$tg\ (90° - \hat{\alpha}) =$

e)

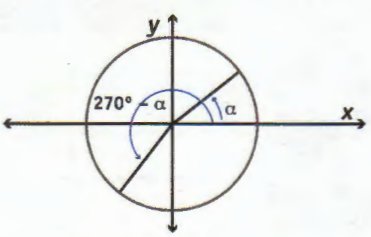


$sen\ (90° + \hat{\alpha}) =$

$cos\ (90° + \hat{\alpha}) = -sen\ \hat{\alpha}$

$tg\ (90° + \hat{\alpha}) =$

f)



$sen\ (270° - \hat{\alpha}) =$

$cos\ (270° - \hat{\alpha}) =$

$tg\ (270° - \hat{\alpha}) =$

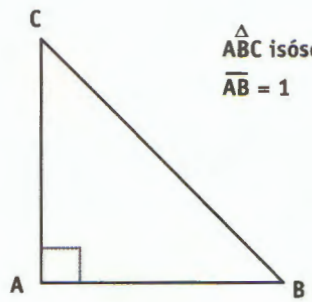
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

30 Completen las expresiones equivalentes.

En grados	$180° - \hat{\alpha}$			$90° - \hat{\alpha}$	$270° - \hat{\alpha}$	$270° + \hat{\alpha}$
En radianes		$\pi + \hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{2} + \hat{\alpha}$			

31 Calculen los valores exactos de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, utilizando la información que se da en las figuras.

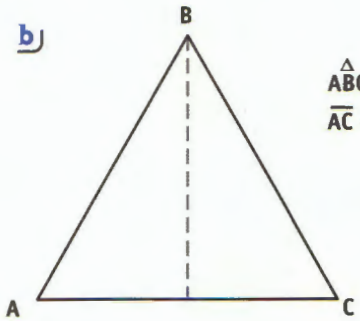
a)



$\triangle ABC$ isósceles

$\overline{AB} = 1$

b)



$\triangle ABC$ equilátero

$\overline{AC} = 2$

$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\ 45° =$

$tg\ 45° =$

$sen\ 60° =$

$cos\ 60° =$

$tg\ 60° =$

$sen\ 30° =$

$cos\ 30° =$

$tg\ 30° =$

32 Completen la tabla con los valores exactos, cuando sea posible.

$\hat{\alpha}$	0°	30°	45°	60°	90°
sen $\hat{\alpha}$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
cos $\hat{\alpha}$					
tg $\hat{\alpha}$					
cotg $\hat{\alpha}$					
sec $\hat{\alpha}$					
cosec $\hat{\alpha}$					

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones trigonométricas

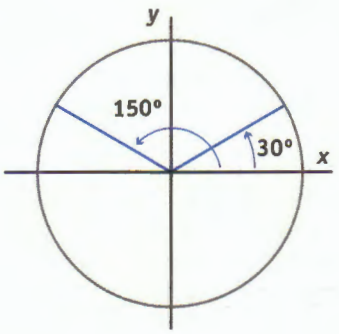
Para leer y recordar

Como las funciones trigonométricas son periódicas y sus valores se repiten cíclicamente, es habitual que las ecuaciones que las involucran tengan infinitas soluciones que también se repiten cíclicamente.
En las siguientes actividades nos vamos a limitar a buscar sólo las soluciones que pertenezcan al intervalo $[0; 2\pi]$ o su equivalente en grados.

Ejemplo:

$$sen\ x = \frac{1}{2} \qquad (0° \leq x \leq 360°)$$

- **Una solución es $x_1 = 30°$ (este valor lo encontramos en la tabla de la página 16, o bien usando la función sin^{-1} de una calculadora científica).**
- **Nos ayudamos con la circunferencia trigonométrica para analizar si existen otros valores de x que verifiquen la igualdad. Por consideraciones de simetría, observamos que $x_2 = 180° - x_1$ es un ángulo cuyo seno es igual al de x_1. Entonces, $x_2 = 150°$ es otro valor que pertenece al intervalo indicado y también cumple la igualdad.**
- **Comprobamos que $sen\ 30° = \frac{1}{2}$ y $sen\ 150° = \frac{1}{2}$.**



33 Encuentren los valores de $x \in (0° \leq x \leq 360°)$ que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $cos\ x = -1$
b) $tg\ x = 1$
c) $\sqrt{2}\ cos\ x = 1$
d) $3\ tg\ x + \sqrt{3} = 0$
e) $sec\ x = \sqrt{2}$
f) $2 - cotg\ x = \frac{1}{2}$

34 Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Descubran cuáles son y expliquen por qué.

a) $sen\ x = -0{,}7$
b) $cos\ x = 1{,}5$
c) $tg\ x = 1\,000\,000$
d) $sec\ x = \frac{1}{2}$
e) $cosec\ x = -50$
f) $cotg\ x = 2$

35 Encuentren los valores de $x \in (0° \leq x \leq 360°)$ que verifican las siguientes ecuaciones:

a) $2cos\ x - 1 = 0$
b) $4cos^2\ x - 1 = 0$
c) $cos\ (x + 15°) = \frac{1}{2}$
d) $tg\ x - \sqrt{3} = 0$
e) $cos^2\ x - 2cos\ x + 1 = 0$
f) $cos^2\ x + 3 = 2cos\ x\ (1 + sec\ x - tg\ x\ .\ sen\ x)$

Para observar

Para resolver la ecuación $2sen^2x + sen\ x - 1 = 0$, podemos hacer así:

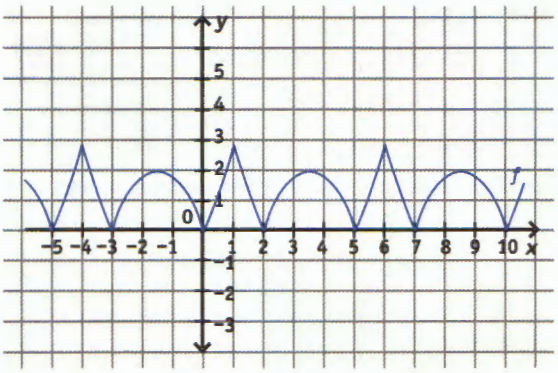
- **Sustituimos $z = sen\ x$** $\qquad 2z^2 + z - 1 = 0$
- **Resolvemos la ecuación cuadrática** $\qquad z_1 = \frac{1}{2}$ y $z_2 = -1$
- **Reemplazamos en (I) y resolvemos** $\qquad \frac{1}{2} = sen\ x \qquad -1 = sen\ x$

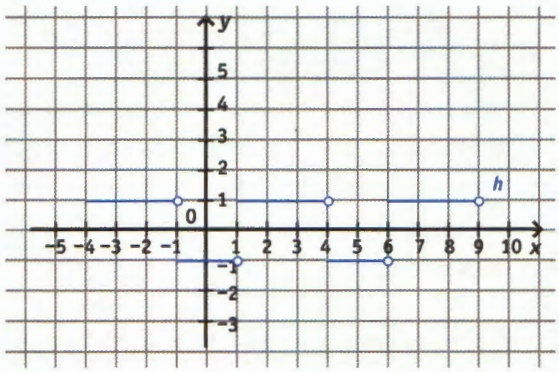
$$x_1 = 30° \ ; x_2 = 150° \qquad x_3 = 270°$$

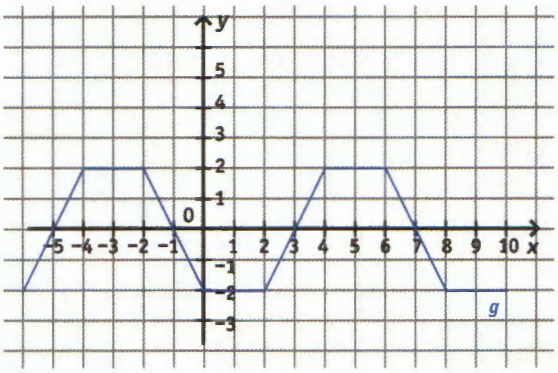
- **Podemos verificar cada uno de los valores que obtuvimos reemplazándolo en la ecuación original.**

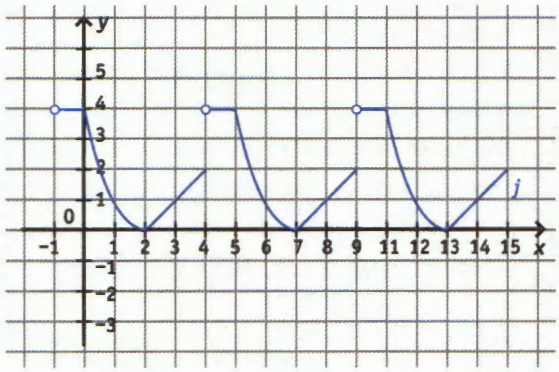
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

36 Observen los siguientes gráficos de funciones periódicas y completen el cuadro.







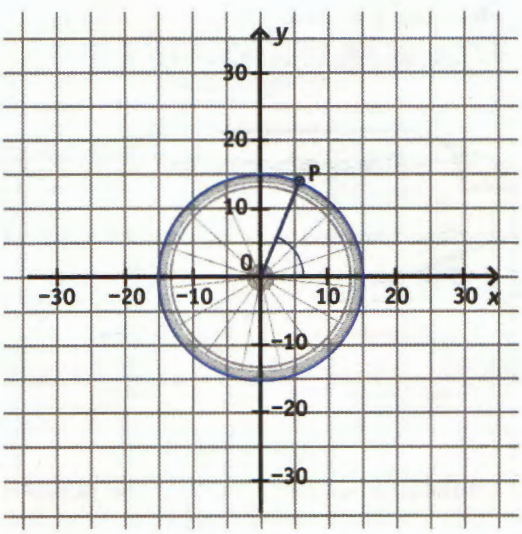


	Dominio	Imagen	Período	Ordenada al origen
f				
g				
h				
j				

37 Una rueda de bicicleta, de 13 cm de radio, gira en su eje a 100 r.p.m. (revoluciones por minuto). Supongan que $\overline{OP}$ es un rayo de la rueda.

a) Si a medida que el punto gira con velocidad angular w constante, el ángulo que forma el rayo con el eje x crece en forma proporcional al tiempo transcurrido, hallen la velocidad angular de $\overline{OP}$.

b) Determinen las fórmulas, respecto de ambos ejes, que indican la posición del punto P a los t segundos.

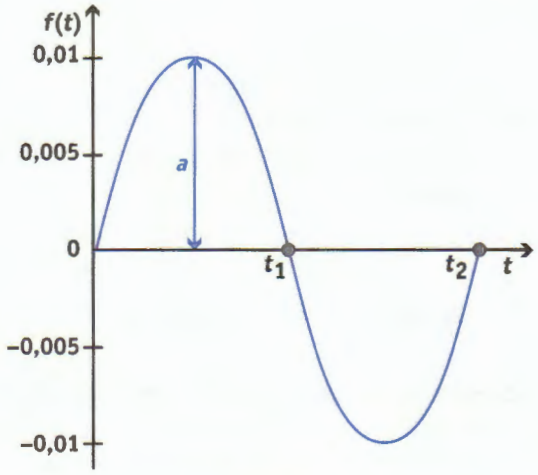


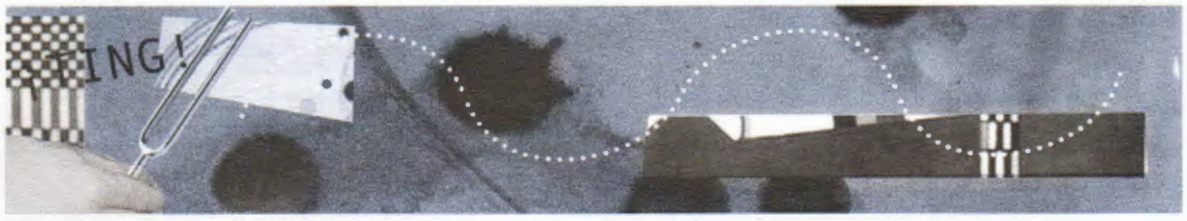
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

El sonido y las funciones periódicas

El *diapasón* se utiliza como referencia para afinar voces e instrumentos musicales. Consiste en una lámina de acero doblada en forma de horquilla con un pie que, cuando se hace sonar, emite un *la* con una frecuencia fijada en 440 vibraciones por segundo. El sonido de un diapasón es un sonido particularmente "simple", llamado *sonido puro*. Curiosamente este sonido, por tener una frecuencia agradable al oído humano y ser fácilmente reconocible, es utilizado en el tono del teléfono.

Al hacer vibrar uno de los dientes de la horquilla del diapasón se genera un movimiento de moléculas de aire que oscilan rápidamente hacia la derecha y hacia la izquierda en una pequeña región alrededor de su posición original. Este desplazamiento en función del tiempo se observa en el siguiente gráfico, en el cual se muestra un ciclo completo.





38 Tengan en cuenta que la frecuencia es la inversa del período y resuelvan las siguientes consignas:

a) Hallen los valores de t_1 y t_2 para los cuales las moléculas de aire están en su posición inicial.

b) Completen las siguientes oraciones:

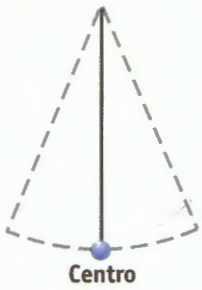
Sabiendo que el gráfico dado corresponde a una función del tipo $f(t) = a \cdot \text{sen}(bt)$, donde a está asociado a la intensidad del sonido resultante, $a =$ ..... , $b =$ ..... y el eje horizontal indica ..... medido en .....

En el ciclo mostrado, la presión sonora alcanza valores extremos para $t =$ ..... y $t =$ .....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los modelos periódicos y las funciones trigonométricas

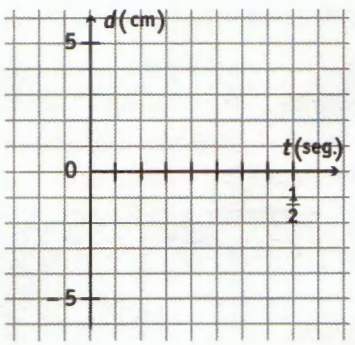
Un *péndulo* es un cuerpo suspendido de un punto fijo que oscila alrededor de este por la acción de su peso.
El modelo matemático del movimiento pendular, llamado *péndulo simple*, consiste en una partícula material que cuelga de un hilo rígido inextensible y sin masa.



39 El movimiento del péndulo de un reloj se puede expresar mediante la función $d(t) = 5\,\text{sen}(4\pi t)$, donde t indica tiempo en segundos y $d(t)$, la "distancia" de la pesa a la vertical en centímetros. (Consideramos esta "distancia" positiva cuando la pesa se encuentra a la derecha del centro y negativa cuando se encuentra a la izquierda).

a) Calculen el período de $d(t)$. .....

b) Representen gráficamente $d(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}$ seg.



c) Completen las siguientes frases:

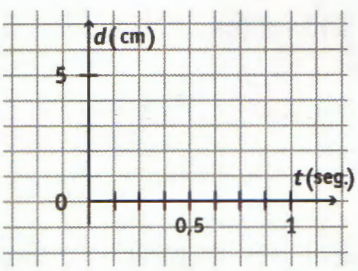
El péndulo pasa por el centro cada ..... segundos.

A los 10,1 segundos la pesa del péndulo se encuentra a ..... cm a la derecha del centro.

A los 47,375 segundos, la pesa está a la ..... del centro a ..... cm.

En el intervalo de t (0; 1) el péndulo pasa exactamente ..... veces por el centro.

d) Representen gráficamente la función $|d(t)|$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$ segundo e indiquen en el gráfico los valores de t para los cuales la distancia al centro es máxima.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

40 Hallen los valores de $x \in [0; 2\pi]$ que verifican las siguientes ecuaciones:

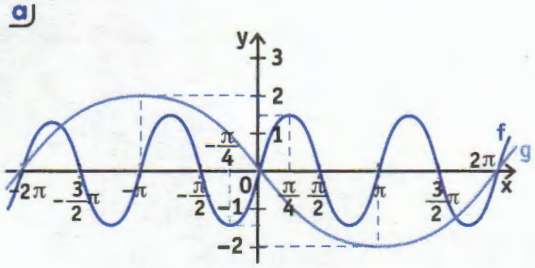
a) $sen\ (990° - x) = cos\ (720° + x) + 1$

b) $sec\ (6x - 10°) = 2$

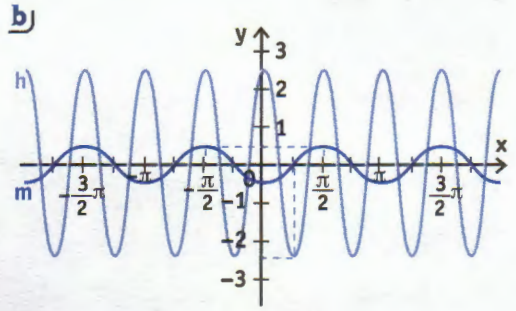
c) $4\ cotg^2\ x = 3\ cosec^2\ x$

41 Las funciones que aparecen representadas en **a)** son del tipo $f(x) = a\ .\ sen\ (bx)$ y las que aparecen en **b)** son del tipo $f(x) = a\ .\ cos\ (bx)$. Para cada una escriban su fórmula e indiquen cuál es su período y su amplitud.

a)



b)



42 Resuelvan las siguientes ecuaciones y, luego, indiquen si tienen alguna solución en común.

a) $(sen\ x + 1)^2 = \frac{1}{4}$

b) $sen^2\ x - \frac{9}{4} = 0$

c) $cos\ x\ .\ sen^2\ x = cos\ x$

d) $sen\ x - cos^3\ x = sen^2\ x\ .\ cos\ x$

43 Encuentren analíticamente los puntos de intersección entre las funciones que componen cada uno de los siguiente sistemas, en el intervalo $[0; 2\pi]$. Verifiquen con un gráfico las soluciones que obtengan.

a) $\begin{cases} y = sen\ x \\ y = cos\ x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = sen\ x \\ y = tg\ x \end{cases}$

44 Realicen una figura de análisis según las indicaciones siguientes:

- ABC es un triángulo rectángulo en $\hat{C}$.
- $\overrightarrow{BE}$ es la bisectriz de $\hat{B}$.
- $\overline{AB} = 1$ unidad.
- D pertenece a $\overline{AB}$ / $\overline{DE} \perp \overline{AB}$.

Prueben que $\overline{AD} = 1 - cos\ \hat{B}$.

45 Representen gráficamente una función que tenga las características que se indican para cada caso.

a) $g(x) = a\ sen\ x + 3$ en $[0;3\pi)$, de amplitud 3 y máximo en $\frac{\pi}{2}$.

b) $h(x) = a\ .\ sen\ (bx)$. Tiene por imagen $[-1;3]$, su gráfico es una onda completa de período $\frac{\pi}{2}$ y la onda comienza decreciendo.

46 Para las funciones de la actividad anterior, indiquen fórmula, conjunto imagen, ceros, conjuntos de positividad y de negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta.

1 La función $y = cos\,(2x)$ tiene exactamente tres ceros en el intervalo:

- a) $(0; 2\pi]$
- b) $(-\pi; \pi]$
- c) $\left[\frac{-\pi}{2}; 2\pi\right]$
- d) $[0; 2\pi)$

2 La función $y = 2sen\,x$ es creciente en el intervalo

- a) $(-\pi; \pi)$
- b) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- c) $(0; 2\pi)$
- d) $(0; \pi)$

3 La cantidad de soluciones de la ecuación $cos\,x - 3 = 0$ es

- a) una.
- b) infinitas.
- c) dos.
- d) ninguna.

4 El ángulo $\alpha = 2000°$

- a) está en el cuarto cuadrante.
- b) tiene coseno positivo.
- c) tiene el mismo lado terminal que $\hat{\beta} = -160°$.
- d) no tiene definida la tangente.

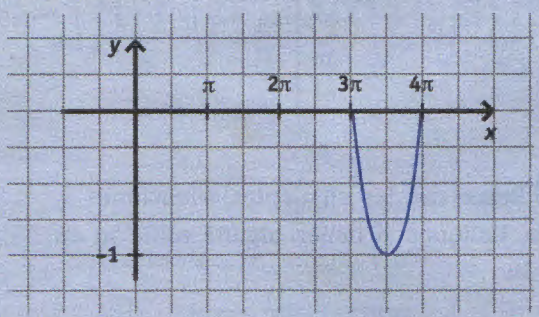
5 Los valores de $x \in [0; \pi]$ que verifican la ecuación $3\,cos^2 x - 2\,cos\,x - 5 = 0$ son

- a) $x = 2\pi$
- b) $x = \frac{3}{2}\pi$
- c) $x = \frac{\pi}{2}$
- d) $x = \pi$

6 Si $f(x) = 2\,sen\,(3x)$, entonces:

- a) $f(2\pi) > f(\pi)$
- b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right)$
- c) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
- d) $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$

6 En el gráfico se observa una función trigonométrica, representada en el intervalo $[3\pi; 4\pi]$ de su dominio.



Su fórmula es la siguiente:

- a) $f(x) = sen\,x$
- b) $f(x) = cos\,x$
- c) $f(x) = tg\,x$
- d) No corresponde a ninguna de las anteriores.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

ACTIVIDADES INTEGRADORAS

Claudio estaba preparando una entrega para la facultad. En el trabajo debía analizar tres fenómenos y presentar tres gráficos cartesianos que modelizaran a cada uno de ellos. Al abrir la ventana, el viento le voló las hojas y se le mezclaron los gráficos.

Gráfico I

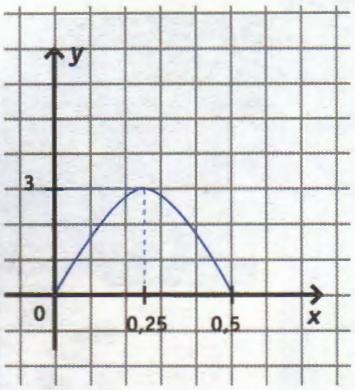


Gráfico II

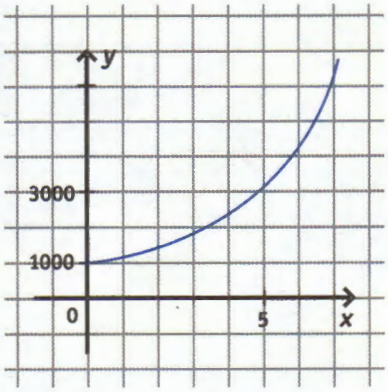
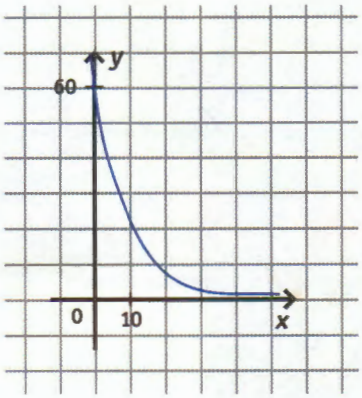


Gráfico III



1 Tengan en cuenta la siguiente lista de fenómenos e indiquen cuál de los gráficos anteriores es el que le corresponde a cada uno.

a) Se estudia una sustancia que pierde un 10% de su volumen por día.

b) Se registra la distancia a la vertical de la pesa de un péndulo en función del tiempo de oscilación.

c) Se observa una población de bacterias que aumenta a razón del 25% por minuto.

2 Escriban el nombre de la variable dependiente y de la variable independiente en los ejes de cada uno de los gráficos.

3 ¿Cuántos individuos tenía la colonia de bacterias originalmente? Justifiquen su respuesta.

.....

4 ¿Cuántas veces pasa la pesa del péndulo por el centro en cada unidad de tiempo? Justifiquen su respuesta.

.....

5 ¿Cuál es la masa de sustancia que había originalmente? ¿Al cabo de cuánto tiempo se redujo a la mitad? Justifiquen su respuesta.

.....

.....

.....

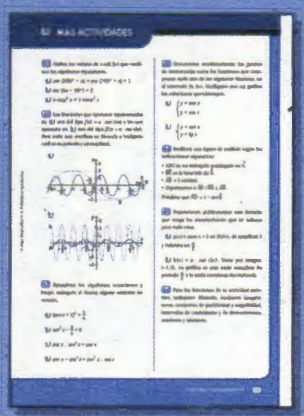
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

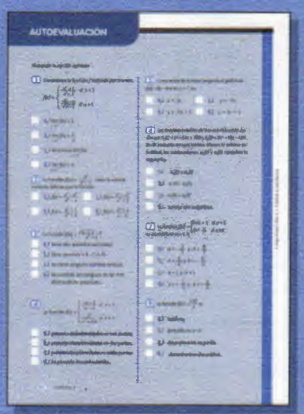
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

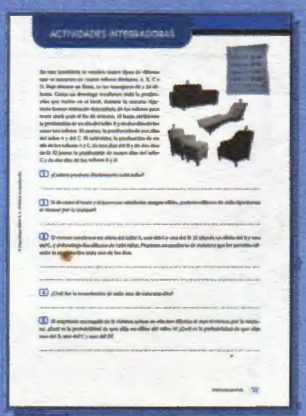
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 4 y 6, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.

Para leer y recordar

Llamamos *función exponencial* a toda función cuya expresión sea de la forma:

$f(x) = k \cdot a^x \quad (k \in \mathbb{R};\ a \in \mathbb{R};\ k \neq 0;\ a > 0;\ a \neq 1)$

Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).

Para observar

Decimos que una ecuación es *exponencial* cuando contiene a la incógnita en algún exponente.
Observen dos ejemplos de cómo se pueden resolver.

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

12 —— Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE